مدرسة العزازمه ب
ص.ب 5528
هاتف 0507513900
بئر السبع 84154

בית הספר אלעזאזמה ב'
ת.ד 5528
טל 0507513900
באר שבע 84154

دوسيه الرياضيات للصف الثامن

اعداد :- طاقم الرياضيات

السنه الدراسيه

2019-2020

النسبه المئويه:-

نحن نستعمل مصطلح **النسبة المئويّة** مرّاتٍ كثيرة في الحياة اليوميّة.

للاستعمالات المختلفة مفاهيم مختلفة، ولا تقتصر على مجال الرياضيّات فقط.

أمثلة

- تظهر النسب المئويّة في الاستفتاءات الصحفيّة، وبكلّ وسائل الاتّصال الأخرى.
- تظهر النسب المئويّة في الدوائر الاقتصاديّة، مثلًا، في إرتفاع وهبوط الأسهم الماليّة في البورصة.
- تظهر النسب المئويّة في دكاكين مختلفة في إعطاء تنزيلاتٍ على منتجاتٍ متنوّعة.
- تظهر النسب المئويّة في إعطاء علامة امتحانٍ في المدرسة.
- تظهر النسب المئويّة في توقّعات حالة الطقس وفي قياس النسبة المئويّة للرطوبة في الجوّ.

ما هي عمليًّا "النسبة المئويّة"؟

نسبة مئويّة واحدة تصف جزءًا يساوي $\frac{1}{100}$ أو 0.01 (واحد بالمائة) من كمّيّة معيّنة.

نشير إلى النسبة المئويّة بواسطة الإشارة %.

1% من الكمّيّة A نُسجّله بالنحو التالي: $\frac{1}{100} \cdot A = 0.01A$.

نحن نصف بواسطة **النسب المئويّة** أجزاءً من كمّيّة.

الانتقال من الكسور إلى النسب المئويّة

كي ننتقل من كتابة كسورٍ إلى نسبٍ مئويّة، يجب أن نوسّع الكسر، بحيث يصبح مقامه 100 . العدد الذي يُسَجَّلُ في البسط يمثّل مقدار النسبة المئويّة.

أمثلة – اِنتقال من كسور إلى نسبٍ مئويّة

(1) $\frac{1}{10}$ الكمّيّة A هي مثل 10% من الكمّيّة A ، لأنّ: $\frac{1}{10}=\frac{10}{100}$.

(2) $\frac{3}{5}$ الكمّيّة A هي مثل 60% من الكمّيّة A ، لأنّ: $\frac{3}{5}=\frac{60}{100}$.

(3) $\frac{1}{3}$ الكمّيّة A هي مثل 33.33% من الكمّيّة A ، لأنّ: $\frac{1}{3}=\frac{33.33}{100}$.

(4) 0.45 الكمّيّة A هي مثل 45% من الكمّيّة A ، لأنّ: $0.45=\frac{45}{100}$.

(5) 1.5 الكمّيّة A هي مثل 150% من الكمّيّة A لأنّ: $1.5=\frac{150}{100}$.

الانتقال من نسبٍ مئويّة إلى كسور

كي ننتقل من كتابة نسبٍ مئويّة لكتابة كسور،
يجب أن نكتب كسرًا مقامه 100 ، حسب تعريف النسبة المئويّة.

أمثلة – اِنتقال من نسبٍ مئويّة إلى كسور

(6) 75% من x هي: $\frac{75}{100}\cdot x=\frac{3}{4}x$

(7) 12.5% من A هي: $\frac{12.5}{100}\cdot A=\frac{1}{8}A$

(8) $\frac{1}{2}$% من B هي: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{100}\cdot B=\frac{1}{200}B$

(9) 120% من x هي: $\frac{120}{100}\cdot x=1.2x$

(10) 1% من C هي: $\frac{1}{100}\cdot C=\frac{C}{100}=0.01C$

☜ **ما هو التقدير ؟**

معنى كلمة تقدير هو : تقييم.

التقدير هو إعطاء قيمةٍ عدديّةٍ مُقرّبة للقيمة الدقيقة المطلوبة.

أمثلة لاستعمال التقدير

(1) وصلتِ السيّدة جورجيت إلى الصائغ وبحوزتها سلسلة مصنوعة من ذهبٍ وفضّة. طلبتْ منه **تقدير** كمّيّة الذهب الموجودة في السلسلة التي ورثتها عن أمّها.

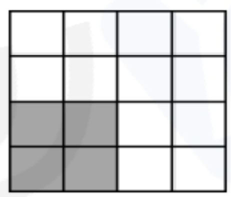
قال لها الصائغ إنّ 80% من وزن السلسلة هو من الذهب الخالص، وكلّ الباقي من الفضّة.

أي: **معظم** السلسلة مصنوعٌ من الذهب. كي يُعطي جوابًا دقيقًا، يجب على الصائغ أنْ يزن السلسلة ويُجري حساباتٍ مناسبة.

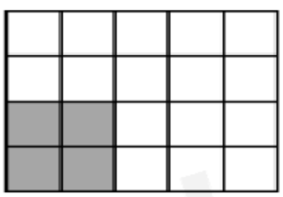
تمارين:- (يمكن التوجه لاسئلة الكتاب صفحه 244)

(1) في كلّ واحدٍ من الرسوم التوضيحيّة التالية، سجّلوا مقدار الجزء الملوّن بكتابة نسبة مئويّة وبكتابة كسورٍ عاديّة.

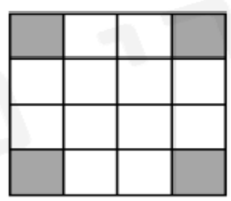
(أ)



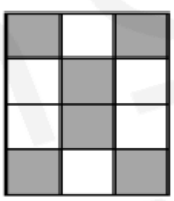
(ب)



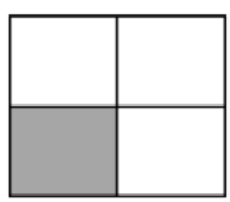
(ج)



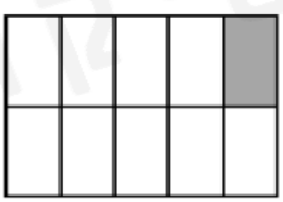
(د)



(هـ)



(و)



(سجّلوا بصورة كسرٍ عاديٍّ وأيضًا بصورة كسرٍ عشريٍّ).

(2) 50%   (3) 15%   (4) 3%   (5) 108%

(6) 37.5%   (7) 150%   (8) $\frac{1}{2}\%$ (9) 0.4%

(10) 220%   (11) 12%   (12) 111%   (13) 0.6%

(14) 33.4%   (15) 22.5%   (16) 103%   (17) 2%

سجّلوا الكسور التالية بصورة نسبٍ مئويّة.

(18) 0.8   (19) 0.01   (20) $\frac{3}{4}$ (21) $\frac{1}{25}$

(22) $\frac{9}{50}$ (23) $\frac{53}{100}$ (24) $\frac{5}{6}$ (25) $\frac{3}{250}$

(26) 3   (27) $\frac{1}{5}$ (28) 0.17   (29) 0.03

انسخوا في الدفتر وأكملوا الناقص في الجدول الذي أمامكم.

	تمثيل بواسطة كسر بسيط / عدد كسريٍّ	تمثيل بواسطة كسرٍ عشريٍّ	تمثيل بواسطة نسبة مئويّة
(أ)			70%
(ب)		0.4	
(ج)	$\frac{1}{5}$		
(د)		0.37	
(هـ)			48%
(و)		0.875	
(ز)	$1\frac{3}{8}$		
(ح)			1.5%
(ط)			180%
(ي)		1.6	

ب. الكمّيّة، النسبة المئويّة، قيمة النسبة المئويّة والتعبير الرابط بينها

تذكير:

- يمكن تمثيل النسبة المئويّة ككسرٍ بسيط أو ككسرٍ عشريٍّ.
- نسبة مئويّة معيّنة هي جزءٌ معيّن من كمّيّة معطاة.

أمثلة

(1) يتعلّم في مدرسة "الأمل" 600 تلميذ.

يتعلّم في شعبة الصفوف الثامنة في المدرسة 200 تلميذ.

25% من تلاميذ شعبة الثوامن، يصلون إلى المدرسة سيرًا على الأقدام.

معلومٌ أيضًا أنّ 25% **من كلّ** التلاميذ، يصلون إلى المدرسة سيرًا على الأقدام.

(أ) ما هو عدد تلاميذ **شعبة الصفوف الثامنة** الّذين يصلون إلى المدرسة سيرًا على الأقدام ؟

(ب) ما هو عدد كلّ التلاميذ الّذين يصلون إلى المدرسة سيرًا على الأقدام ؟

<u>الحلّ:</u>

كي نجيب على بندي السؤال، ننتقل بدايةً من تمثيل النسب المئويّة إلى تمثيل الكسور البسيطة. 25% من كمّيّة معيّنة، بالتمثيل الكسريّ البسيط، هي $\frac{1}{4}$ الكمّيّة ، لأنّ: $\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$.

(أ) $\frac{1}{4}$ كلّ تلاميذ **شعبة الصفوف الثامنة** هم 50 تلميذًا، لأنّ: $50 = 200 \cdot \frac{1}{4}$.

جواب: 50 تلميذًا من شعبة الصفوف الثامنة يصلون الى المدرسة

(ب) $\frac{1}{4}$ كلّ تلاميذ **المدرسة** هم 150 تلميذًا، لأنّ: $150 = 600 \cdot \frac{1}{4}$.

جواب: 150 تلميذًا بالإجمال، يصلون إلى المدرسة سيرًا على الأقدام.

قيمة النسبة المئويّة، هي **الكمّيّة** الملائمة للنسبة المئويّة من مُجمل الكمّيّة الكلّيّة.

) معلومٌ أنّ 70 شجرةً تُشكّل 20% من كلّ أشجار البيّارة. كم شجرةً يوجد في البيّارة ؟

الحلّ:

نكتُب النسبة المئويّة ككسرٍ بسيط: $\frac{20}{100} \Leftarrow 20\%$.

قيمة النسبة المئويّة هي: 70 شجرة.

الكمّيّة الكلّيّة غير معروفة. نشير إليها بـ x .

حسب العلاقة بين المقادير نسجّل المعادلة:

$$\frac{20}{100} \cdot x = 70$$

$$\frac{1}{5} \cdot x = 70 \quad / \cdot 5$$

$$x = 350$$

جواب: في البيّارة 350 شجرة.

(4) يعمل في مدرسة "الأخوّة" 80 معلّمًا. في العام 2013، إزداد عدد التلاميذ الّذين سجّلوا في المدرسة ولذا إزداد أيضًا عدد المعلّمين بـ 20% .
جدوا كم عدد المعلّمين الّذين يعلّمون في العام 2013 .

الحلّ:

طريقة أ:

نجد كم معلّمًا أُضيف إلى طاقم العاملين:

$$\frac{20}{100} \cdot 80 = \frac{1}{5} \cdot 80 = 16$$

نحسب الآن عدد المعلّمين الّذين يعلّمون في المدرسة في العام 2013 :

$$80 + 16 = 96$$

طريقة ب:

يمكن الحساب بمرحلةٍ واحدة عدد المعلّمين الّذين يعلّمون في المدرسة في العام 2013 . إضافة 20% تكافئ أنْ نضرب بـ 1.2

$$(100\% + 20\% = 120\% \text{ ، } 120\% \rightarrow \frac{120}{100} = 1.2)$$

لذا: $\frac{120}{100} \cdot 80 = 1.2 \cdot 80 = 96$

تمارين:- (يمكن التوجه لاسئلة الكتاب صفحه 253)

(1) إنسخوا الجدول في الدفتر وأكملوا الناقص. بيّنوا مراحل الحلّ.

	الكميّة الكلّيّة	النسبة المئويّة	قيمة النسبة المئويّة
(أ)	42	15%	
(ب)		10%	1.5
(ج)	84		63
(د)		5%	2
(هـ)	180	24%	
(و)	50		6
(ز)	250	8%	
(ح)		12.5%	20
(ط)	74	x%	

(2) يوجد في علبة "كوتج" 250 غرامًا . معلومٌ أنّ العلبة تحتوي على 5% دهون.
إحسبوا كم غرام دهون يوجد في علبة "كوتج" واحدة.

(3) يوجد في الحليب 3% دهون. أضافوا إلى الحليب 100 غرام ماء، ولذا، أصبح في الحليب المخلوط 2% دهون. كم كان وزن الحليب في البداية ؟

(5) في جرّة 30 وردة. ذبُلَ 20% منها.
كم وردة بقي في الجرّة ؟

(7) يتعلّم في الصفّ الثامن "د" 40 تلميذًا. يُشكّلُ البنون 35% من عدد تلاميذ الصفّ. إحسبوا كم عدد البنات في الصفّ الثامن "د" .

(8) يشترك في دورة رياضة 50 تلميذًا. تُشكّلُ البنات 64% من عدد كلّ تلاميذ الدورة. إحسبوا عدد البنات و عدد البنين المشتركين في الدورة.

(10) إنسخوا في الدفتر وأكملوا حسب المثال
(في كلّ البنود، نتطرّق للسعر النهائيّ).
مثال: ازدياذٌ بنسبة **25%** يكافئ الضرب بـ **1.25** .
(أ) إرتفاعٌ بنسبة **30%** يكافئ الضرب بـ______.
(ب) تخفيضٌ بنسبة **15%** يكافئ الضرب بـ ______.
(ج) تخفيضٌ بنسبة **12%** يكافئ الضرب بـ ______.
(د) الضرب بـ 1.1 يكافئ إرتفاعًا بنسبة %______.
(هـ) الضرب بـ 0.65 يكافئ تخفيضًا بنسبة %______.

(14) سعر منتج بعد أن ارتفع بـ 20% هو 216 شاقلًا.
إحسبوا سعر المنتج قبل ارتفاعه.

(15) سعر منتج بعد أن إنخفض بـ 30% هو 140 شاقلًا.
إحسبوا سعر المنتج قبل انخفاضه.

(27) درّاجة هوائيّة كان سعرها 900 شاقل، إرتفع سعرها بـ 10% .
بمناسبة العيد، أعلن البائع عن حملة تنزيلات وخفّض سعر الدرّاجة الهوائيّة بـ 10% .
هل سعر الدرّاجة الهوائيّة بعد التخفيض هو 900 شاقل ؟ علّلوا.

(28) إرتفع سعر منتج، كلّف 100 شاقل، بـ 60% . ما هي النسبة المئويّة التي يجب أن تخفّض بها المنتج كي يكون سعره مرّة أخرى 100 شاقل ؟

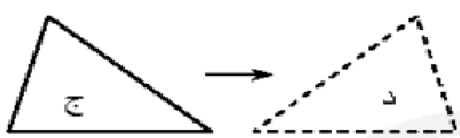
(29) إنخفض سعر منتج، كلّف 250 شاقلاً، بـ 20% ، ومن ثمّ خُفّض مرّة أخرى بـ 20% .
إحسبوا سعر المنتج بعد هذين التخفيضين.

تطابق المثلثات :-

تعريف:
مثلّثان يُسمّيان **متطابقين** إذا كان من الممكن وضع أحدهما على الآخر، بحيث يغطّيان بعضهما البعض بالضبط.
كي نفعل هذا، يمكن إزاحة، إدارة أو قلب أحد المثلّثات.

- عندما يُطلب منّا وضع مثلّث واحدٍ على مثلّث آخر، **بحيث يغطّيان بالضبط بعضهما البعض**، فيجب ملاءمة الأضلاع الثلاثة والزوايا الثلاث في المثلّث الأوّل مع تلك في المثلّث الثاني.

المثلّث (أ) يطابق المثلّث (ب).
إذا أزحنا المثلّث (أ) إلى اليمين، فهو يغطّي المثلّث (ب) ويحدث **تلاؤم** بين الزوايا وبين الأضلاع في المثلّثين.



المثلّث ج يطابق المثلّث (د).
إذا أزحنا المثلّث ج إلى اليمين، فهو **لا يغطّي** المثلّث (د).
فقط إذا قلبنا ("عكسنا") المثلّث (ج) وأزحناه، فهو يغطّي المثلّث (د) ويحصل **تلاؤم** بين الزوايا وبين الأضلاع في المثلّثين.

تمارين :- (في الكتاب صفحه 174)

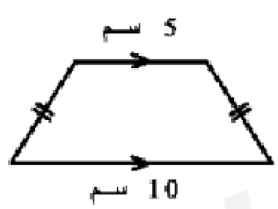
(1) أمامكم مثلّثان متساويا الأضلاع (القياسات معطاة بالسم).

(أ) إنسخوا المثلّث (ب) على ورقة شفّافة، ضعوه على المثلّث (أ) وافحصوا ما إذا كان المثلّثان متطابقين.

(ب) رسم سليمان مثلّثًا متساوي الأضلاع طول ضلعه 7 سم.
هل المثلّث الّذي رسمه سليمان يطابق أحد المثلّثين في الرسم ؟ إشرحوا.

(ج) هل كلّ زوج مثلّثات متساوية الأضلاع هما مثلّثان متطابقان ؟ علّلوا.

(4) معطى في الرسم من جهة اليسار شبه منحرف متساوي الساقين.
إنسخوه على صفحة وقسّموه إلى
ثلاثة مثلّثات متطابقة.
إستعينوا بالطيّ والقصّ.



ب. نظريّات التطابق

- المثلّثان المتساويان بضلعٍ واحدٍ فقط، ليسا بالضرورة متطابقين.
- المثلّثان المتساويان بضلعين فقط ليسا، بالضرورة متطابقين.
- المثلّثان المتساويان بضلعٍ واحدٍ وبزاوية واحدةٍ فقط ليسا بالضرورة متطابقين.
- المثلّثان المتساويان بزاويتين، ليسا بالضرورة متطابقين.

أي: معطيان متساويان في مثلّثين **لا** يكفيان لنبرهن أنّ المثلّثين متطابقان.

1. نظريّة التطابق: ضلع، زاوية، ضلع

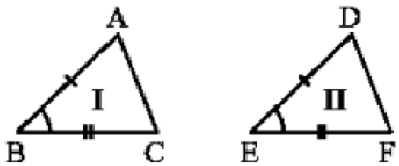
☜ **نظريّة التطابق: ضلع، زاوية، ضلع**

إذا كان في المثلّث الأوّل ضلعان يساويان ضلعين في المثلّث الثاني، وأيضًا الزاويتان المحصورتان بين الأضلاع متساويتان، فإنّ المثلّثين متطابقان.

نظريّة التطابق: **ضلع، زاوية، ضلع** ، نكتبها باختصار هكذا: **ض. ز. ض.**

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

أمثلة لنظريّة التطابق: ض . ز. ض .



(1) تمعّنوا في الرسم من جهة اليسار.
يمكننا القول إنّ المثلّثين متطابقان
بالتلاؤم حسب نظريّة التطابق – ض. ز. ض .
(أُنظروا الإشارات المماثلة في الرسم).

يكون التلاؤم بالشكل التالي:

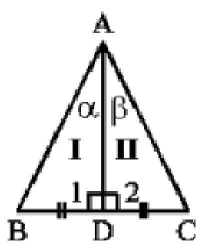
- الرأس B (المثلّث I) يوضع على الرأس E (المثلّث II).
- الرأس A (المثلّث I) يوضع على الرأس D (المثلّث II).
- الرأس C (المثلّث I) يوضع على الرأس F (المثلّث II).

إعتمادًا على المُشار إليه في الرسم، يمكن أن نكتب:

① $BA = ED$ ② $\measuredangle B = \measuredangle E$ ③ $BC = EF$

وكنتيجة لتطابق المثلّثين، تتحقّق بالضرورة أيضًا المتساويات التالية:

① $AC = DF$ ② $\measuredangle A = \measuredangle D$ ③ $\measuredangle C = \measuredangle F$



(2) تمعّنوا في الرسم من جهة اليسار.
AD هو **ضلع مشترك** للمثلّثين ΔABD و- ΔACD .
يتطابق المثلّثان بالتلاؤم حسب
نظريّة التطابق الأولى – **ض. ز. ض** . **(إشرحوا!)**.
إذا "طوينا" المثلّث ΔABC على طول AD ،
فسيغطّي المثلّث الأوّل الثاني بالضبط. يكون التلاؤم على النحو التالي:

- الرأس A (المثلّث I) يوضع على الرأس A (المثلّث II).
- الرأس B (المثلّث I) يوضع على الرأس C (المثلّث II).
- الرأس D (المثلّث I) يوضع على الرأس D (المثلّث II).

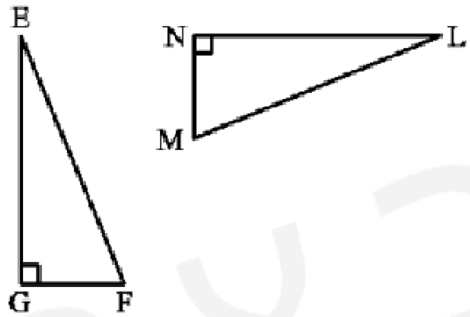
اعتمادًا على المُشار إليه في الرسم، يمكن أن نكتب:

① $AD = AD$ (كلّ مقدارٍ يساوي نفسه)

② $\measuredangle D_1 = \measuredangle D_2 = 90°$

③ $BD = CD$

تمارين :- (في الكتاب صفحه 181)



(1) معطى: $\Delta EFG \cong \Delta LMN$ بالتلاؤم.

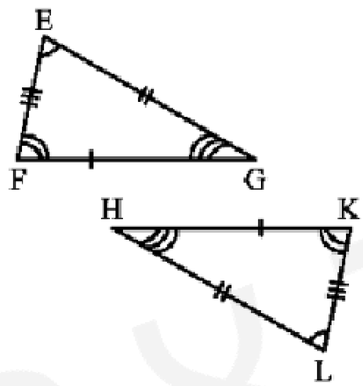
إنسخوا في الدفتر وأكملوا:

$\measuredangle G =$ ____ $NL =$ ____

$\measuredangle M =$ ____ $NM =$ ____

$\measuredangle F =$ ____ $ML =$ ____

$\measuredangle E =$ ____



(3) المثلّثان الظاهران في الرسم متطابقان.

(أ) إنسخوا في الدفتر وأكملوا:

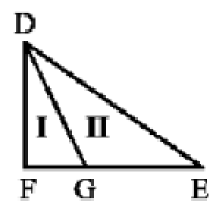
Δ ____ $\cong \Delta$ ____ بالتلاؤم.

(ب) سجّلوا ستّ المتساويات

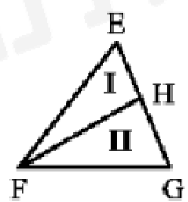
إعتمادًا على الإشارات الظاهرة في الرسم.

في كلّ واحدٍ من الرسوم **(4)** – **(6)** ، سجّلوا اسم الضلع المشترك للمثلّثين **I** و- **II** .

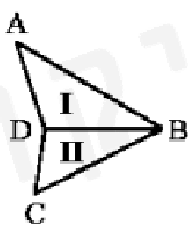
(4)



(5)



(6)

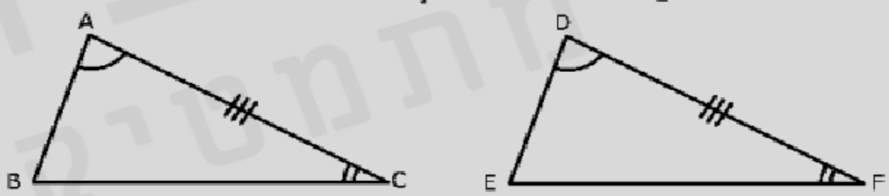


2. نظريّة التّطابق: زاوية، ضلع، زاوية

☜ **نظريّة التطابق: زاوية، ضلع، زاوية**

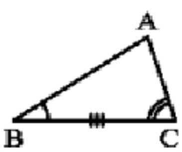
إذا كان في مثلّث واحدٍ زاويتان مساويتان لزاويتين في مثلّثٍ ثانٍ، وأيضًا الضلعان اللّذان يقعان بين الزوايا متساويان، فإنّ المثلّثين متطابقان.

نظريّة التطابق: **زاوية، ضلع، زاوية** تُكتب باختصارٍ هكذا: **ز. ض. ز.**



$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

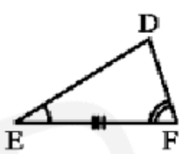
أمثلة



(1) معطى من جهة اليسار المثلّثان: ΔABC و- ΔDEF .

إعتمادًا على المُشار إليه في الرسم نستطيع أن نكتب:

① $\measuredangle B = \measuredangle E$ ② $BC = EF$ ③ $\measuredangle C = \measuredangle F$



يمكننا القول إنّ المثلّثين متطابقان بالتّلاؤم حسب نظريّة التطابق **ز. ض. ز** (أُنظروا الإشارات المماثلة في الرسم).

نكتُب: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (إنتبهوا للتلاؤم).

ونتيجة لتطابق المثلّثين تتحقّق بالضرورة أيضًا المتساويات الآتية:

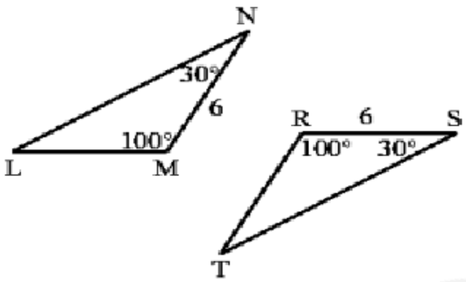
① $AB = DE$ ② $AC = DF$ ③ $\measuredangle A = \measuredangle D$

تنتج 6 متساويات بالإجمال.

(2) (أ) هل المثلّثان في الرسم متطابقان ؟ إشرحوا.

(ب) إذا أجبتم بنعم، فسجّلوا التطابق بالتلاؤم وسجّلوا المتساويات الستّ.

(ج) إحسبوا مقدار الزاوية الثالثة في كلّ واحدٍ من المثلّثين.



الحلّ:

(أ) المثلّثان متطابقان بالتلاؤم حسب نظريّة التطابق:

زاوية $(\measuredangle N = \measuredangle S)$، ضلع $(\mathbf{NM = SR})$، زاوية $(\measuredangle M = \measuredangle R)$.

(ب) $\Delta LMN \cong \Delta TRS$ والمتساويات هي:

$\measuredangle L = \measuredangle T \qquad LM = TR$

$\measuredangle N = \measuredangle S = 30° \qquad \mathbf{MN = RS}$

$\measuredangle M = \measuredangle R = 100° \qquad \mathbf{LN = TS}$

(ج) كما سُجّل في البند (ب) ، $\measuredangle L = \measuredangle T$.

مقدار الزاوية $\measuredangle L$ يُحسب حسب النظريّة: "مجموع زوايا المثلّث **°180** " .

$$\measuredangle L = 180° - (100° + 30°) =$$

$$= \mathbf{180° - 130° = 50°}$$

وبالطبع فأيضًا $\mathbf{\measuredangle T = 50°}$.

تمارين :-

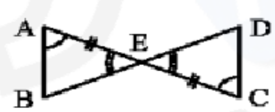
(1) في كلّ واحدٍ من أزواج المثلّثات في البنود (أ) – (د) ، سجّلوا:

(i) هل المثلّثان متطابقان.

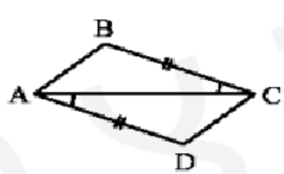
(ii) إذا كان المثلّثان متطابقين، أُكتبوا نظريّة التطابق المناسبة.

ملاحظة: مقادير متساوية مُشارٌ إليها بإشارات مماثلة.

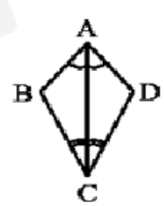
(أ)



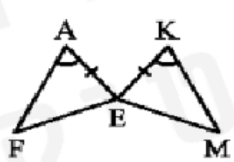
(ب)

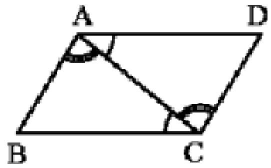


(ج)



(د)





(3) في الرسم من جهة اليسار، المثلّثان متطابقان حسب نظريّة التطابق: زاوية، ضلع، زاوية.

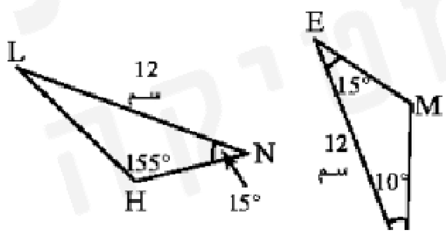
(أ) سجّلوا المتساويات الثلاث.

(ب) إستعملوا إشارة التطابق ($\cong$) وسجّلوا على جانبيها إسمَي المثلّثين المتطابقين.

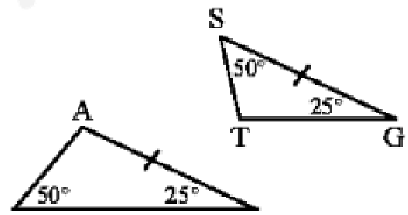
(ج) سجّلوا المتساويات الثلاث الإضافيّة الناتجة **بسبب** تطابق المثلّثين.

(4) في كلّ واحدٍ من أزواج المثلّثات التي في البندين (أ) – (ب)، حدّدوا هل المثلّثان متطابقان حسب **نظرية التطابق ز. ض. ز.**

(ب) ★

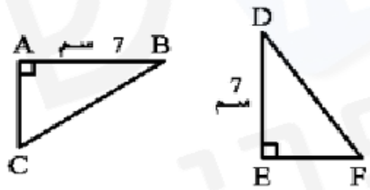


(أ)

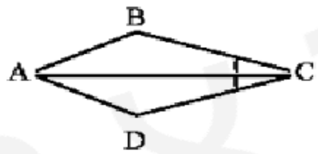


(14) في كلّ واحدٍ من الرسمين (أ) و- (ب) ، أضيفوا مساواة واحدة بين مقدارين
كي يكون المثلّثان متطابقين حسب **نظريّة التطابق ز.ض.ز.**

(أ)

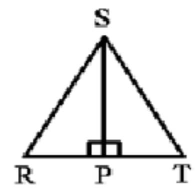


(ب)

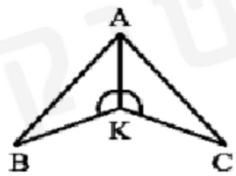


(15) في كلّ واحدٍ من الرسمين (أ) و- (ب) ، أضيفوا مساواة واحدة بين مقدارين
كي يكون المثلّثان متطابقين حسب **نظريّة التطابق ز.ض.ز.**

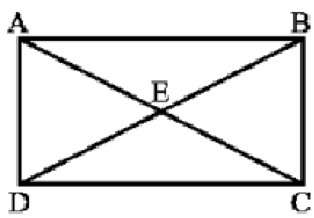
(أ)



(ب)



(19) أمامكم المستطيل ABCD .
قطرا المستطيل (AC و- BD) يتقاطعان في النقطة E .
إنسخوا في الدفتر، أكملوا واشرحوا:



(أ) $\Delta AED \cong \Delta BEC$
حسب نظريّة التطابق: ________ .
(ب) $\Delta DEC \cong \Delta AEB$
حسب نظريّة التطابق: ________ .
(ج) $\Delta ABC \cong \Delta BAD$
حسب نظريّة التطابق: ________ .

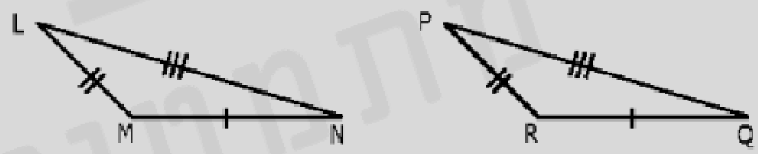
4. نظريّة التّطابق: ضلع، ضلع، ضلع

☜ **نظريّة التطابق: ضلع، ضلع، ضلع**

إذا كان في مثلّثٍ واحدٍ ثلاثة أضلاع تساوي ثلاثة أضلاع في مثلّثٍ ثانٍ،

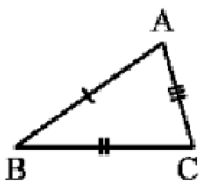
فإنّ المثلّثين متطابقان.

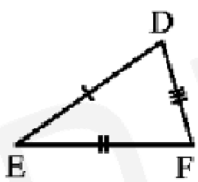
نظريّة التطابق: **ضلع، ضلع، ضلع** تُكتب باختصار: **ض. ض. ض.**



$\Delta LMN \cong \Delta PRQ$

مثال





معطى من الجهة اليسرى المثلّثان: ΔABC و- ΔDEF .

إعتمادًا على المُشار إليه في الرسم نستطيع أن نكتب:

① $AB = DE$ ② $AC = DF$ ③ $BC = EF$

نستطيع القول إنّ المثلّثين متطابقان حسب

نظريّة التطابق ض. ض. ض (أُنظروا الإشارات المماثلة في الرسم).

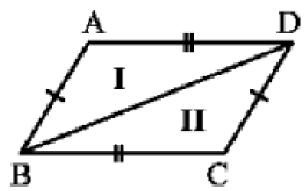
نكتب: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (إنتبهوا إلى التلاؤم !).

وكنتيجةٍ لتطابق المثلّثين، تتحقّق بالضرورة أيضًا المتساويات الآتية:

① $\measuredangle A = \measuredangle D$ ② $\measuredangle B = \measuredangle E$ ③ $\measuredangle C = \measuredangle F$

نحصل بالإجمال على 6 متساوياتٍ.

تمارين :-

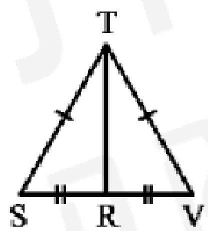


(1) المثلّثان **I** و- **II** اللذان في الرسم من الجهة اليسرى متطابقان حسب نظريّة التطابق: ضلع، ضلع، ضلع.

(أ) سجّلوا المتساويات الثلاث إعتمادًا على الرسم.

(ب) سجلوا بصياغةٍ رياضيّة هذا التطابق (استعملوا الإشارة $\cong$ وحافظوا على التلاؤم).

(ج) إنسخوا في الدفتر وأكملوا: المتساويات الثلاث الناتجة بسبب تطابق المثلّثين هي متساوياتٌ بين: ________ (أضلاع / زوايا).



(2) (أ) سجّلوا المتساويات إعتمادًا على الرسم.

(ب) هل صحيحٌ أنّ نقول:

$\Delta STR \cong \Delta VTR$ بالتلاؤم ؟

إشرحوا.

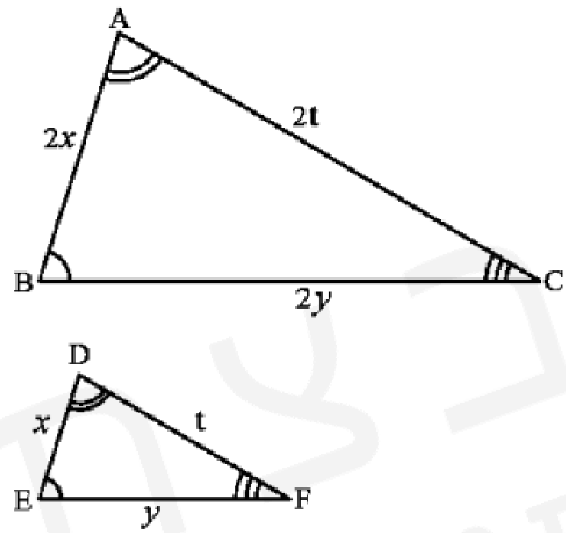
تشابه المثلّثات والمضلّعات

مثلّثان يُسمّيان مثلّثين **متشابهين** إذا تحقّق:

- لكلّ زاويةٍ في المثلّث الأوّل توجد زاويةٌ مساويةٌ لها في المثلّث الثاني.
- توجد **نفس النسبة** بين أطوال كلّ ثلاثة أزواج الأضلاع الواقعة مقابل الزوايا المتساوية في المثلّثين بالتناظر (بالتلاؤم).

تُسمّى هذه النسبة: **نسبة التشابه**. نشير إليها عادةً بالحرف **k** .

نُشير إلى تشابه المثلّثات بواسطة الإشارة: ~ **فعلى سبيل المثال**: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.



نتمعّن في الرسم من الجهة اليُسرى.

بحسب الإشارات على الرسم:

$\measuredangle B = \measuredangle E$ ، $\measuredangle A = \measuredangle D$ ، $\measuredangle C = \measuredangle F$

وهناك نسبة متساوية بين الأضلاع بالتناظر:

$\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = \frac{AB}{DE} = \frac{2}{1}$.

لذا، نقول:

في الرسم مثلّثان **متشابهان**.

بكتابة رياضيّة، نكتب: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

ونسبة التشابه هي $\frac{2}{1}$.

كما تعلّمنا في الفصل الّذي بحث في النسبة والتناسب،

فإنّ المساواة بين نسبتين تُسمّى **تناسب**.

بحسب قوانين التناسب، يمكننا أيضًا تسجيل التناسب التالي : $\frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC} = \frac{DE}{AB} = \frac{1}{2}$.

أمثلة

(1) في المثلّث ΔABC معطى: $AB =$ 8 سم ، $AC =$ 10 سم ، $BC =$ 12 سم .

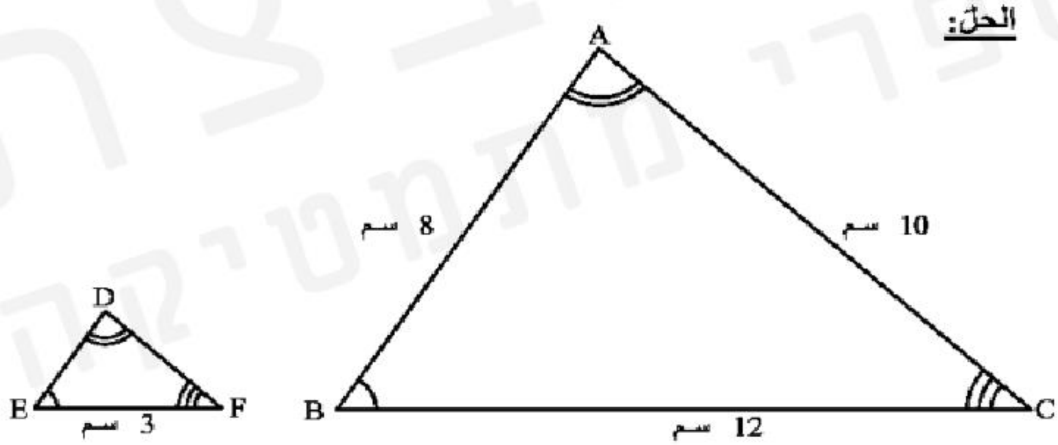
في المثلّث ΔDEF معطى: $EF =$ 3 سم (أنظروا الرسم).

معطى أنّ المثلّثين **متشابهان ويتحقّق:** $\Delta BAC \sim \Delta EDF$.

(أ) ماهي نسبة التشابه ؟

(ب) إحسبوا طول DF وطول DE .

__الحلّ:__



(أ) نسبة التشابه تساوي النسبة بين كلّ زوج أضلاع متناظرين في مثلّثين متشابهين.

في الحالة الّتي أمامنا، في المثلّث ΔDEF، معطى **الضلع EF** . الضلع المناظر له في المثلّث ΔABC **هو الضلع BC** (يقع كلاهما مقابل زاويتين متساويتين أُشير إليهما بقوسين).

لذا، نسبة التشابه في هذه الحالة هي: $\frac{BC}{EF} = \frac{12}{3} = \frac{4}{1}$

معنى هذا هو: طول كلّ واحدٍ من أضلاع المثلّث ABC يساوي 4 أضعاف طول الضلع المناظر له في المثلّث DEF .

جواب: نسبة التشابه بين ΔABC و- ΔDEF هي 4:1 .

كان بالإمكان أيضًا حساب نسبة التشابه على النحو التالي: $\frac{EF}{BC} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

وعندها نقول: نسبة التشابه بين المثلّث ΔDEF والمثلّث ΔABC هي $1:4$.

(ب) الآن، يمكننا حساب طولَي الضلعين DF و- DE .

نستعمل نسبة التشابه الّتي وجدناها والمعطيات الظاهرة على الرسم ونحصل على:

$k = \frac{AB}{DE}$

$\frac{4}{1} = \frac{8}{DE}$

$DE = \frac{8}{4} =$ 2 سم

$k = \frac{AC}{DF}$

$\frac{4}{1} = \frac{10}{DF}$

$DF = \frac{10}{4} =$ 2.5 سم

جواب: DE = 2 سم ، DF = 2.5 سم .

(2) معطى أنّ: $\Delta ABC \sim \Delta FDE$ بالتناظر

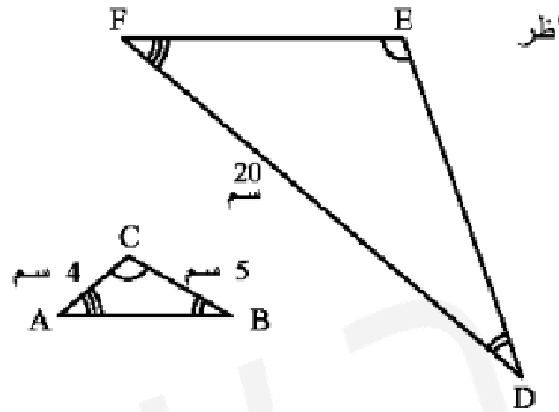
ونسبة التشابه بين المثلّثين هي $\frac{1}{3}$.

بالإضافة: $AC =$ 4 سم ،

$BC =$ 5 سم ، $DF =$ 20 سم .

إحسبوا أطوال الأضلاع:

AB ، DE و- FE .



الحلّ:

نستطيع أن نكتب:

$$\frac{AC}{FE}=\frac{1}{3}$$

نعوّض: $AC =$ 4 سم . نحصُلُ على:

$$\frac{4}{FE}=\frac{1}{3}$$

بحسب قوانين التناسب الّتي تعلّمناها، نحصُلُ على:

$FE =$ 12 سم

نحسب بنفس الطريقة طول DE :

$$\frac{BC}{DE}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{5}{DE}=\frac{1}{3}$$

$DE =$ 15 سم

نحسب الآن طول AB :

$$\frac{AB}{FD}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{AB}{20}=\frac{1}{3}$$

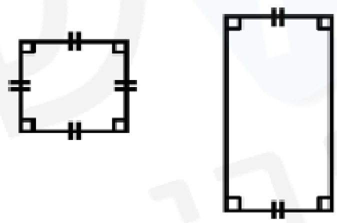
$3AB = 20 \quad \Rightarrow \quad AB =$ $6\frac{2}{3}$ سم

✍ **جواب:** $FE =$ **12 سم** ، $DE =$ **15 سم** ، $AB =$ **$6\frac{2}{3}$ سم** .

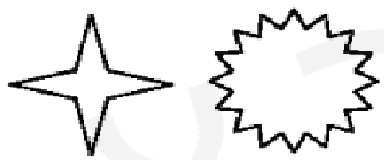
تمارين :- (في الكتاب صفحه 576)

(1) أيّ أزواج الأشكال التالية **متشابهة** ؟ علّلوا إجاباتكم.

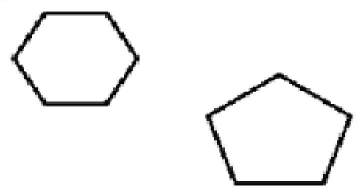
(أ)



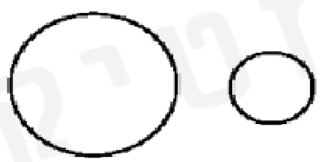
(ب)



(ج)

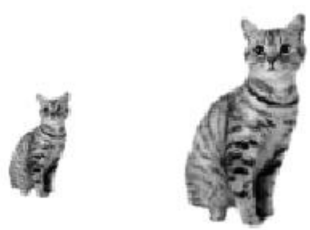


(د)



(هـ)

(و)



(2) (أ) أرسموا في دفاتركم غرضين **متشابهين**.

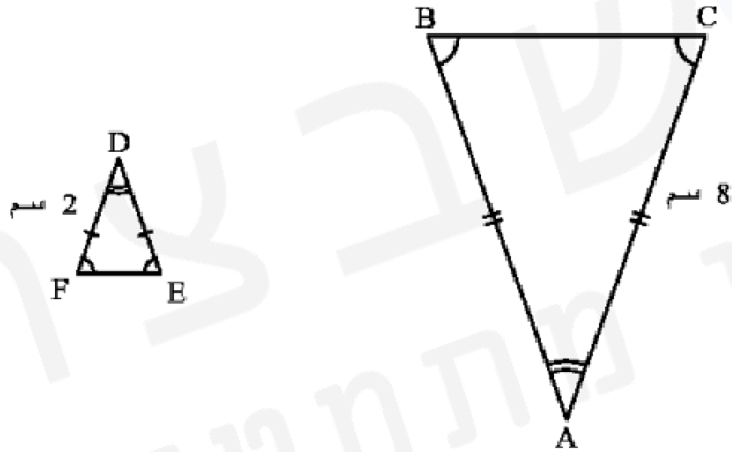
(ب) أرسموا في دفاتركم غرضين **غير متشابهين**.

(3) **المثلّثان اللذان يظهران في كلّ بندٍ هما مثلّثان متساويا الساقين متشابهين:**

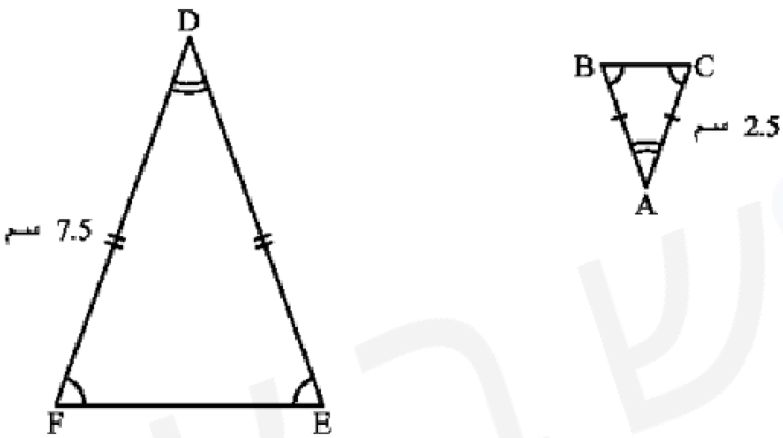
$\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

جِدُوا **نسبة التشابه** في كلّ زوج (بين ΔABC و- ΔDEF).

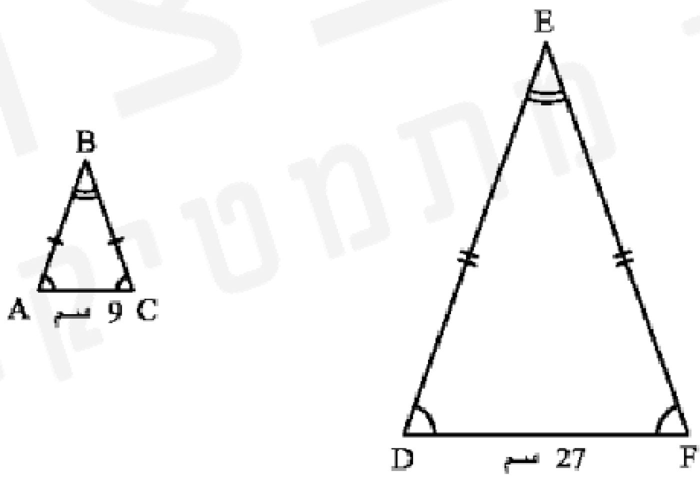
(أ)



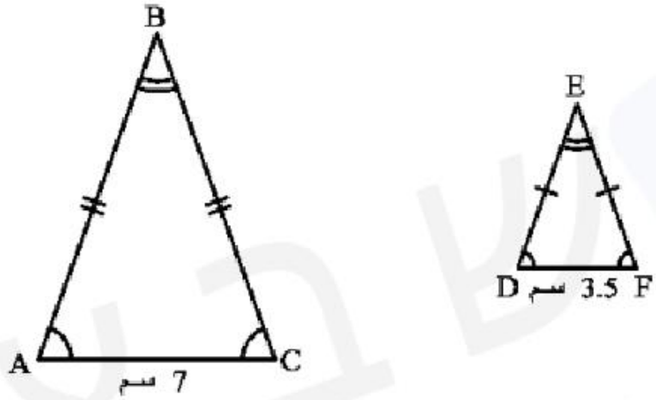
(ب)



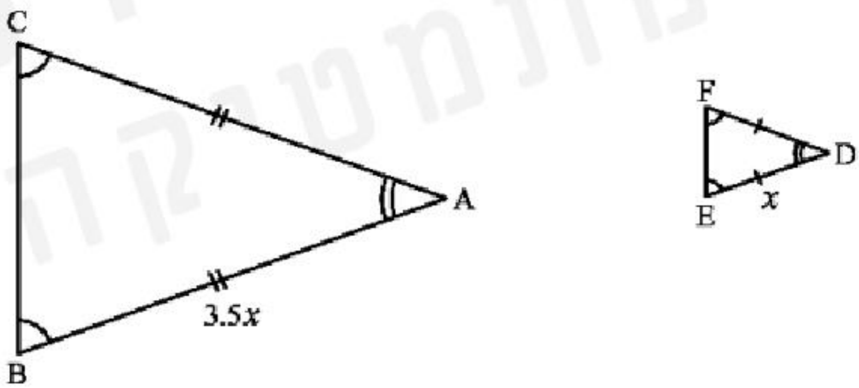
(ج)



(د)



(هـ)



الاحتمال

أ. نتائج ممكنة واحتمالاتها

الاحتمال هو علمٌ في الرياضيّات يبحث في أحداث مستقبليّة ليست مؤكّدة، وإنّما نستطيع أن نقدّر أو نحسب احتمال حدوث نتيجة مستقبليّة معيّنة.

> **إحتمال** حصول نتيجة هو تحديدٌ مُسبقٌ لإمكانيّة حدوث نتيجة معيّنة، في سلّمِ قيمٍ يتراوح بين 0 و- 1 ، بما في ذلك العددان 0 و- 1 .
> بكلماتٍ أخرى: الاحتمال هو خارج القسمة بين عدد نتائج حدثٍ معيّن، وعدد نتائج التجربة كلّها. نسمّي نتائج كلّ التجربة فضاء التجربة أو فضاء العيّنة.
> نُشير عادةً إلى الاحتمال بالحرف P .

نميّز بين ثلاث حالات:

☜ **حالة "أ" – نتيجة مؤكّدة**

نُسمّي النتيجة نتيجة **مؤكّدة** إذا علمنا بشكلٍ قاطعٍ أنّها **ستحدث**.
في هذه الحالة، احتمال حدوثها هو 1 .
على سبيل المثال، في تجربة إلقاء مكعّب لعب، النتيجة: **"نحصل على عددٍ أصغر من 8"**، هي نتيجة مؤكّدة واحتمال حدوثها هو 1 .

☜ **حالة "ب" – نتيجة ممكنة**

نُسمّى النتيجة نتيجة **ممكنة** إذا كانت هنالك **إمكانيّة لحدوثها**.
في هذه الحالة، احتمال حدوثها أكبر من 0 وأصغر من 1 .
على سبيل المثال، في تجربة إلقاء مكعّب لعب، النتيجة: **"نحصل على عددٍ أكبر من 4"**، هي نتيجة ممكنة واحتمالها أكبر من 0 وأصغر من 1 .

☜ **حالة "ج" – نتيجة مستحيلة**

تُسمّى النتيجة نتيجة **مستحيلة** إذا علمنا بشكلٍ قاطعٍ أنّها **لن تحدث**.

في هذه الحالة، احتمال حدوثها هو 0 .

على سبيل المثال، في تجربة إلقاء مكعّب لعب، النتيجة: **"نحصل على العدد 100"**،

هي نتيجة مستحيلة واحتمال حدوثها هو 0 .

أمثلة

(1) اليوم هو يوم الأحد الأوّل من شباط. في كلّ واحدٍ من البنود الآتية مُسجّلةٌ "نتيجة" أو "إمكانيّة" معيّنة. حدّدوا هل هي **ممكنة**، **مستحيلة** أو **مؤكّدة**.

(أ) **غدًا هو يوم الاثنين.**

(ب) **غدًا سيكون ماطرًا.**

(ج) **غدًا هو يوم الثلاثاء.**

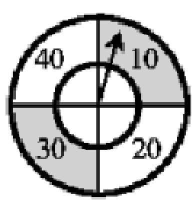
الحلّ:

(أ) من الواضح أنّ يوم غدٍ هو يوم الاثنين لأنّ اليوم هو يوم الأحد.
ولذا فنحن نتحدّث عن نتيجة **مؤكّدة**.

(ب) في دولة إسرائيل، ينتمي شهر شباط لفصل الشتاء. لذا، فمن الممكن أن يكون يوم غدٍ يومًا ماطرًا، ولكن يمكن أن لا يكون ماطرًا. ولذا فنحن نتحدّث عن نتيجة **ممكنة**.

(ج) بما أنّ يوم غدٍ هو يوم الاثنين، فلا يمكن أن يكون يوم غدٍ هو يوم الثلاثاء.
أي أنّ النتيجة الّتي نتحدّث عنها هي نتيجة **مستحيلة**.

(2) "دولاب الحظّ" الظاهر في الرسم من الجهة اليُسرى، مُقسّمٌ لـ 4 قطاعاتٍ متساوية.



في كلّ قطاع، مُسجّلٌ عددٌ (10 ، 20 ، 30 ، 40).

تُديرُ الدولابَ ويتوقّف العقرب على أحد القطاعات.

إذا توقّف العقرب على أحد الخطوط الفاصلة بين الأعداد، أدَرْنا الدولاب مرّة أخرى.

في كلّ بند مُسجّلة نتيجة معيّنة.

يجب أن نحدّد هل النتيجة ممكنة، **مستحيلة أم مؤكّدة**،

وعلينا أن نكتب هل احتمال حدوثها **"أكبر من 0 وأصغر من 1"** ، أو أنّه **"0"** ، أو أنّه **"1"** .

(أ) **توقّف العقرب على العدد 30 .**

(ب) **توقّف العقرب على عددٍ أصغر من 50 .**

(ج) **توقّف العقرب على العدد 50 .**

الحلّ:

(أ) يمكن للعقرب أن يتوقّف على العدد 30 ، وكذلك يمكن أن يكون قد توقّف على عددٍ آخرَ. ولذا فالنتيجة: **"توقّف العقرب على العدد 30 " هي نتيجة ممكنة واحتمال حدوثها** أكبر من 0 وأصغر من 1 .

(ب) معلومٌ مُسبقًا بأنّ العقرب سيتوقّف على عددٍ أصغر من 50 لأنّ أربعة الأعداد المُسجّلة على الدولاب أصغر من 50 . لذا فالنتيجة: **" توقّف العقرب على عددٍ أصغر من 50"، هي نتيجة مؤكّدة** واحتمال حدوثها هو 1.

(ج) لا يظهر العدد 50 على الدولاب. لذا فالنتيجة: **"توقّف العقرب على العدد 50"، هي نتيجة مستحيلة** واحتمال حدوثها هو 0 .

تمارين

(1) يتّصل فادي بالبنك. هل النتيجة: **"سيسمع فادي رنّة مشغول"**، هي نتيجة مؤكّدة، نتيجة ممكنة، أم نتيجة مستحيلة ؟

(2) يُلقي نبيل كرة باتّجاه السلّة. هل النتيجة: **"ستدخل الكرة السلّة"**، هي نتيجة مؤكّدة، نتيجة ممكنة، أم نتيجة مستحيلة ؟ إشرحوا.

(3) لنهيلة ثلاثة أبناء. هل النتيجة: **"إسم أحد أبنائها هو حازم"**،
هي نتيجة مؤكّدة، نتيجة ممكنة، أم نتيجة مستحيلة ؟

(4) نُلقي مكعّب لعب. هل النتيجة: **"سنحصل على عددٍ ينقسم على 3 بدون باقٍ"**،
هي نتيجة مؤكّدة، نتيجة ممكنة، أم نتيجة مستحيلة ؟

(5) نُلقي مكعّب لعب. هل النتيجة: **"سنحصل على عددٍ ينقسم على 5 بدون باقٍ"**،
هي نتيجة مؤكّدة، نتيجة ممكنة، أم نتيجة مستحيلة ؟

(6) اليوم هو مساء رأس السنة (اليهوديّة). بالنسبة لكلّ واحدةٍ من النتائج (أ) – (ج) حدّدوا هل هي نتيجة مؤكّدة، نتيجة ممكنة، أم نتيجة مستحيلة. إشرحوا.

(أ) **العيد (اليهوديّ) القادم سيكون عيد الفصح.**

(ب) **غدًا سيكون يوم السبت.**

(ج) **غدًا سيكون يوم عطلة لتلاميذ الصفّ الثامن في الوسط اليهوديّ.**

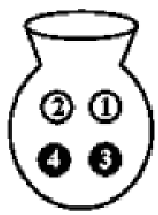
2. ما هو الاحتمال ؟

إذا كان احتمال حدوث نتيجة معيّنة مساويًا لاحتمال عدم حدوثها،
فإنّ احتمال حدوث هذه النتيجة هو: $\frac{1}{2}$.

(1) يتعلّم في صفٍّ 30 تلميذًا: 15 ابنًا و- 15 بنتًا.
نختار عشوائيًّا تلميذًا.
ما هو الاحتمال بأن يكون التلميذ الّذي اختير ابنًا ؟

<u>الحلّ:</u>

بما أنّ عدد البنين يساوي عدد البنات، فإنّ احتمال اختيار ابنٍ يساوي احتمال عدم اختيار ابنٍ (أي، اختيار بنتٍ).
لذا، فإنّ احتمال اختيار ابنٍ يساوي $\frac{1}{2}$.

(2) في جرّة غير شفّافة 4 كرات.


الأولى بيضاء وعليها مُسجّل 1 . الثانية بيضاء وعليها مُسجّل 2 .
الثالثة سوداء وعليها مُسجّل 3 . الرّابعة سوداء وعليها مُسجّل 4 .
نُخرج عشوائيًّا كرة من الجرّة.
أعطوا مثالًا لنتيجة ممكنة يكون احتمالها مساويًا بالضبط لـ $\frac{1}{2}$ (هنالك أكثر من حلٍّ واحدٍ).

<u>الحلّ:</u>

إمكانيّة I

نتمعّن في النتيجة: **"الكرة الّتي أُخرجت بيضاء"**.
بحسب المعطى، نصف الكرات الّتي في الجرّة هي بيضاء ونصفها سوداء.
لذا، احتمال حصولنا على كرة بيضاء يساوي بالضبط احتمال عدم حصولنا على كرة بيضاء (أي، حصولنا على كرة سوداء).
لذا، احتمال إخراج كرة بيضاء هو $\frac{1}{2}$.

إمكانيّة II

تتمعّن في النتيجة: **"على الكرة الّتي أُخرجتْ مُسجّلٌ عددٌ زوجيٌّ".**

بحسب المعطى، فعلى الكرات مُسجّلة الأعداد: 1 ، 2 ، 3 ، 4 .

إثنان من الأعداد هما عددان زوجيّان واثنان منهما فرديّان.

لذا، إحتمال حصولنا على كرة عليها مُسجّلٌ عددٌ زوجيٌّ يساوي

بالضبط احتمال عدم حصولنا على كرة عليها مُسجّل عددٌ زوجيٌّ

(أي، حصولنا على كرة عليها مُسجّلٌ عددٌ فرديٌّ).

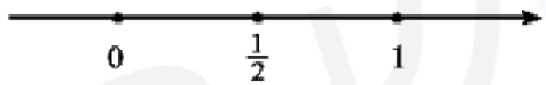
لذا، إحتمال إخراج كرة مُسجّل عليها عدد زوجيٌّ هو $\frac{1}{2}$.

- **إذا كانت هناك نتيجة ممكنة احتمال حدوثها أكبر من احتمال عدم حدوثها، فإنّ احتمال حدوثها أكبر من $\frac{1}{2}$ وأصغر من 1 .**
- **إذا كانت هناك نتيجة ممكنة احتمال حدوثها أصغر من احتمال عدم حدوثها، فإنّ احتمال حدوثها أصغر من $\frac{1}{2}$ وأكبر من 0 .**

تعيين الاحتمال على محور الأعداد

أمثلة

أمامكم محور أعدادٍ مُعيّنة عليه الاحتمالات التالية: 0 ، $\frac{1}{2}$ ، 1 .

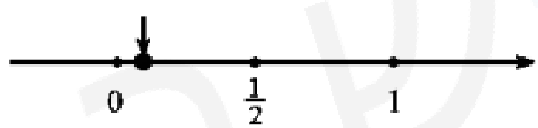


في الأسئلة **(1) – (6)** معطاة نتائج مختلفة.
يجب تقدير احتمال كلّ نتيجةٍ وتعيينها على محور الأعداد.

(1) إستلم عفيف صُرّةً تحتوي على 5 مفاتيح، **وفقط** واحدٌ من بينها هو المفتاح المناسب لفتح باب مدخل بيته.
إختار عفيف بشكلٍ عشوائيٍّ أحد المفاتيح.
ما هو الاحتمال بأن يكون عفيف قد اختار **بالضبط** المفتاح المناسب ؟
عيّنوا هذا الاحتمال على محور الأعداد.

<u>الحلّ:</u>

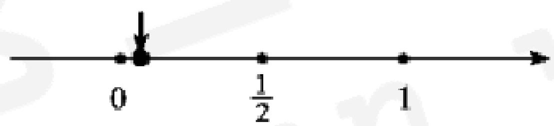
من الممكن أن **يختار** عفيف **المفتاح المناسب بالضبط**، ولكن احتمال حدوث هذا صغير وذلك لوجود 4 مفاتيح ليست مناسبة وفقط مفتاح واحد مناسب.
لذا فإنّ احتمال حدوث هذا يتراوح بين 0 و- $\frac{1}{2}$.



(2) حنان ومرام هما صديقتان تجلسان بجانب بعضهما البعض في الصفّ.
تختار المعلّمة عشوائيًا تلميذين من الصفّ لمهمّة معيّنة.
في الصفّ 30 تلميذًا.
قدّروا نقطة وعيّنوها على محور الأعداد بحيث تدلّ على احتمال
اختيار حنان ومرام لهذه المهمّة.

<u>الحلّ:</u>

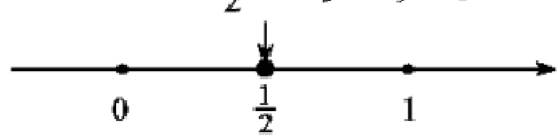
في الصفّ 30 تلميذًا. هناك احتمال صغير جدًّا بأن يتمّ بالذات اختيار حنان ومرام.
لذا فإنّ احتمال حدوث هذا يتراوح بين 0 و- $\frac{1}{2}$.



(3) طُلِب من سليم اختيار أحد الأعداد التالية:
1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 ، 10 .
ما هو الاحتمال بأن يختار سليم عددًا فرديًا ؟
عيّنوا هذا الاحتمال على محور أعداد.

<u>الحلّ:</u>

معطى 10 أعداد. نصفها فرديٌّ ونصفها زوجيٌّ.
لذا فإنّ احتمال الحصول على عددٍ فرديٍّ هو $\frac{1}{2}$.



تمارين

(1) في صفٍّ 40 تلميذًا. 20 بنتًا والباقي بنون. دَعتِ المعلّمة عشوائيًّا أحد التلاميذ بالقدوم إلى اللوح. ما هو الاحتمال بأن تختار المعلّمة بنتًا ؟

(2) في دكّان حلويات 160 مُلبّسة موضوعة داخل عُلبة. 80 ملبّسة بطعم الفواكه والباقي بطعم النعناع. نختار عشوائيًّا مُلبّسة من العُلبة.
ما هو الاحتمال بأن نختار مُلبّسة بطعم النعناع ؟

(3) في عُلبة 4 كرات: إثنتين من بينها صفراوين، والكرتين الأخريين برتقاليّتين.
نختار عشوائيًّا كرة من العلبة. ما هو الاحتمال بأن نختار كرة برتقاليّة ؟

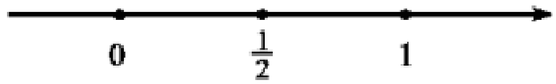
(4) أعطوا مثالًا يوجد له نتيجة ممكنة، احتمال حدوثها أكبر من $\frac{1}{2}$ وأصغر من 1 .

(5) أعطوا مثالًا له نتيجة ممكنة احتمال حدوثها أصغر من $\frac{1}{2}$ وأكبر من 0 .

(6) يتعلّم في صفٍّ 38 تلميذًا: 18 ابنًا و- 20 بنتًا.
نختار عشوائيًّا تلميذًا من الصفّ.
إختاروا الإجابة الصحيحة:
(أ) إحتمال اختيار بنتٍ أكبر من $\frac{1}{2}$ وأصغر من 1 .
(ب) إحتمال اختيار بنتٍ أكبر من 0 وأصغر من $\frac{1}{2}$.

(7) في جرّة غير شفّافة 6 كراتٍ: 5 كراتٍ زرقاء وكرة واحدة بيضاء.
نختار عشوائيًّا كرة من الجرّة.
إختاروا الإجابة الصحيحة:
(أ) إحتمال اختيار كرة بيضاء أكبر من $\frac{1}{2}$ وأصغر من 1 .
(ب) إحتمال اختيار كرة بيضاء أكبر من 0 وأصغر من $\frac{1}{2}$.

(9) أمامكم محور أعداد:

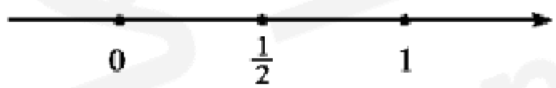


بالنسبة لكلّ واحدةٍ من النتيجتين التاليتين، قدّروا احتمالها وعيّنوه على محور الأعداد.

(أ) **في إلقاء مكعّب لعب حصلنا على عدد ينقسم على 3 دون باقٍ.**

(ب) **في إلقاء مكعّب لعب حصلنا على عدد ينقسم على 1 دون باقٍ.**

(10) أمامكم محور أعداد:



بالنسبة لكلّ واحدةٍ من النتيجتين التاليتين، قدّروا احتمالها وعيّنوه على محور الأعداد.

(أ) **في إلقاء مكعّب لعب حصلنا على عدد أصغر من 3 .**

(ب) **في إلقاء مكعّب لعب حصلنا على عدد أصغر من 7 .**

التكراريّة، التكراريّة النسبيّة والاحتمال

- **التكراريّة:** عدد المرّات الّتي يظهر فيها عنصرٌ في المجموعة.
  أو: عدد المرّات الّتي ظهرتْ فيها نتيجة معيّنة في تجربة / إستطلاع.
  التكراريّة تجيب عن السؤال: **كم ؟**
- **التكراريّة النسبيّة:** هي النسبة بين تكراريّة نتيجة معيّنة وبين العدد الكلّيّ للعناصر الّتي نتحدّث عنها.
  أو: حاصل القسمة بين عدد المرّات الّتي ظهرتْ فيه نتيجة معيّنة في تجربة / إستطلاع وبين عدد المرّات الّتي نفّذنا فيها التجربة.
  التكراريّة النسبيّة تجيب عن السؤال: **أيّ جزءٍ ؟**

- هناك علاقة بين **التكراريّة النسبيّة والاحتمال**.
التكراريّة النسبيّة لحدوث نتيجة معيّنة
هو معنًى آخرُ للاحتمال.
- التكراريّة النسبيّة لكلّ نتيجة ممكنة هي **تقديرٌ** لاحتمال
حدوث نفس النتيجة (عندما تُنفّذ التجربة عددًا كبيرًا من المرّات).

مجموع احتمالات كلّ الإمكانيّات (الغريبة)، الّتي تشمل كلّ النتائج الممكنة في تجربة معيّنة، يساوي مجموع التكراريّات النسبيّة في التجربة ويساوي 1 (عندما تكون التكراريّة النسبيّة مُمثّلة بواسطة كسر).

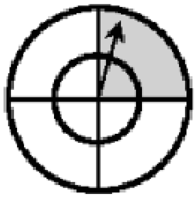
أمثلة

(1) مصنع دواء يُنتج مرهمًا للشفاء من البُثور. يدّعي العالم المسؤول بأنّ المرهم لا يساعد دائمًا لكن، إحتمال الشفاء كبير.
أُجريتِ التجربة التالية: طُلِب من 1,000 شخصٍ عانوا من البثور استعمال المرهم، ومن ثمّ سُئلوا ما إذا كان المرهم قد ساعدهم. نتائج التجربة مُجملةٌ في الجدول الآتي:

النتيجة	ساعد المرهم بشكلٍ مطلق	ساعد المرهم بشكلٍ جزئيٍّ	لم يساعد المرهم بتاتًا	الإجمال
التكراريّة (عدد الأشخاص)	800	150	50	1,000
التكراريّة النسبيّة	$\frac{800}{1,000}$	$\frac{150}{1,000}$	$\frac{50}{1,000}$	1

يستعمل شخصٌ المرهم.
هل يمكننا تقدير ما هو الاحتمال بأن يساعده المرهم بشكلٍ مطلقٍ ؟

(2) معطى دولاب حظٍّ بحيث $\frac{1}{4}$ مساحته ملوّنٌ بالرماديّ، و- $\frac{3}{4}$ مساحته ملوّنٌ بالأبيض (أنظروا الرسم من الجهة اليُسرى). ندير الدولاب.



الاحتمال بأن يتوقّف العقرب على الجزء الرماديّ هو $\frac{1}{4}$.

إذا أداروا الدولاب 80 مرّة، فكم مرّة **بالتقريب** سيتوقّف العقرب داخل الجزء الرماديّ ؟

<u>الحلّ:</u>

نستعين بالحقيقة أنّ التكراريّة النسبيّة لنتيجة معيّنة هو تقديرٌ دقيقٌ لاحتمال حدوث نفس النتيجة. إحتمال النتيجة "رماديّ" هو $\frac{1}{4}$ ، لذا، **فتقريبًا**، في رُبعٍ من الـ 80 مرّة سنحصل على النتيجة "رماديّ".

أي، سنحصل على النتيجة "رماديّ" 20 مرّة.

إشرحوا لماذا يجب أنْ تُكتَب الكلمة: <u>بالتقريب</u>.

<u>الحلّ:</u>

ساعد المرهم بشكلٍ مطلقٍ 800 من بين 1,000 شخص فُحصوا،

أي ساعد $\frac{4}{5}$ الّذين فُحِصوا.

التكراريّة النسبيّة: $\frac{800}{1,000}$ تساوي $\frac{4}{5}$.

لذا، الاحتمال بأن يساعد المرهم بشكلٍ مطلقٍ حين يستعملونه هو: $\frac{4}{5}$.

ملاحظة: نُعير الانتباه إلى أنّه من الآن فصاعدًا، سنستعمل **التكراريّة النسبيّة** لنتيجة تنتمي لتجربةٍ معيّنة – على أنّها **احتمال** حدوث النتيجة في المستقبل.

(3) يُنتج مصنعٌ كؤوسًا. جزءٌ معيّنٌ من هذه الكؤوس يكون غير صالحٍ. كي يُقدّروا الاحتمال بأن تكون كأسٌ غير صالحة، نفّذوا التجربة الآتية:

فحصوا 200 كأسٍ وتبيّن أنّ 20 من بينها غير صالحة.

ما هو الاحتمال بأن تكون كأسٌ عشوائيّة مصنوعة في هذا المصنع غير صالحة ؟

الحلّ:

نُنظّم نتائج التجربة في جدولٍ.

النتيجة	كأس غير صالحة	كأس صالحة	الإجمال
التكراريّة (عدد الكؤوس)	20	180	200
التكراريّة النسبيّة	$\frac{20}{200}$	$\frac{180}{200}$	1

$\frac{20}{200}$ هي التكراريّة النسبيّة للكؤوس غير الصالحة.

بعد اختزال الكسر نحصل على $\frac{1}{10}$.

لذا، الاحتمال بأن تكون كأسٌ عشوائيّةٌ مصنوعةٌ في هذا المصنع غير صالحة هو $\frac{1}{10}$.

تمارين

(1) في مدينة معيّنة، قاموا بمعاينة حالة الطقس في فصل الشتاء. تمّتِ المعاينات خلال سنواتٍ كثيرة. عاينوا بالإجمال 100 يوم شتويّ. نُظّمت النتائج في الجدول الآتي:

النتيجة	هطل مطر	لم يهطلْ مطر	الإجمال
التكراريّة (عدد الأيّام)	40	60	100

ما هو الاحتمال بأن يهطلَ مطرٌ في يومٍ شتويٍّ عشوائيٍّ في هذه المدينة ؟

(2) يُنتج مصنع قُبّعات. فُحِصتْ 120 قبّعة ووُجِد بأنّ 100 منها فقط كانت صالحة.

(أ) إنسخوا في الدفتر وأكملوا الجدول الآتي:

النتيجة	صالحة	غير صالحة	الإجمال
التكراريّة			

(ب) ما هو الاحتمال بأن تكون قبّعة اختيرتْ عشوائيًا في هذا المصنع صالحة ؟

(3) ينمو في حقلٍ شقائق نعمان حمراء وشقائق نعمان بنفسجيّة (**ولا تنمو** شقائق نعمان بلون آخر).
إختاروا عيّنة ممثّلة إحتوتْ على 240 شقيقة نعمان، واتّضح أنّ 60 من بينها كانت حمراء اللون، والباقي كانت بنفسجيّة اللون.

(أ) سجّلوا جدولًا مناسبًا للمعطيات.

(ب) ما هو الاحتمال بأن تكون شقيقة نعمان اختيرتْ من هذا الحقل عشوائيًّا بنفسجيّة اللون ؟

(4) ينمو في حقلٍ أزهارٌ ألوانها: صفراء، بيضاء وبنفسجيّة (**لا توجد ألوان أخرى**).
إختاروا عيّنة ممثّلة مؤلّفة من 300 زهرة واتّضح أنّ 100 من بينها صفراء، 150 بيضاء والباقية كانت بنفسجيّة.

(أ) إبنوا جدولًا مناسبًا للمعطيات.
(ب) ما هو الاحتمال بأن نختار عشوائيًا من هذا الحقل زهرة بنفسجيّة ؟
(ج) ما هو الاحتمال بأن نختار عشوائيًا من هذا الحقل زهرة بيضاء ؟
(د) ما هو الاحتمال بأن نختار عشوائيًا من هذا الحقل زهرة ليست صفراء ؟

(5) كي نفحص نجاعة التطعيم ضدّ الإنفلونزا، إختاروا عيّنة ممثّلة مؤلّفة من 200 شخص حصلوا على التطعيم. من بينهم، فقط 25 شخصًا مرضوا بالإنفلونزا.
ما هو الاحتمال بأن يكون شخصٌ حصل على التطعيم قد مرض بالإنفلونزا ؟

(6) أُجريَ استطلاع في مدينة معيّنة في موضوع قراءة الصُحف.
من عيّنة ممثّلة مؤلّفة من 1,000 شخص، صرّح 650 منهم بأنّهم يقرأون الصحف وصرّح الباقي بأنّهم لا يقرأون الصحف.
نختار عشوائيًا شخصًا من هذه المدينة. ما هو الاحتمال بأن يكون يقرأ الصحف ؟

(16) فيما يلي نتائج فحص عيّنة مُمثّلة مؤلّفة من 500 تفّاحة في حقلٍ معيّن:

النتيجة	تفاحة كبيرة	تفاحة متوسّطة	تفاحة صغيرة	الإجمال
التكراريّة	200	120	180	500

(أ) قطف وائل تفّاحة عشوائيّة من هذا الحقل. ما هو الاحتمال بأن تكون التفّاحة كبيرة ؟
(ب) إذا فحصوا 1,000 تفّاحة من هذا الحقل، فكم منها، **بالتقريب**، ستكون كبيرة ؟
(ج) إذا فحصوا 1,000 تفّاحة من هذا الحقل، فكم منها، **بالتقريب**، ستكون صغيرة ؟

(17) في مُجمّعٍ تجاريٍّ معيّنٍ 3 قاعات سينما.
فيما يلي توزيع الأشخاص الّذين وصلوا إلى السينما في يوم معيّن:

القاعة	"أ"	"ب"	"ج"	الإجمال
التكراريّة (عدد الأشخاص)	20	12	8	40

(أ) في نفس اليوم، وصل السيّد حسن إلى السينما في نفس المجمّع.
ما هو الاحتمال بأن يكون دخل إلى القاعة "أ" ؟

(ب) في نفس الأسبوع، وصل إلى السينما 360 شخصًا.
كم من بينهم **بالتقريب** دخل إلى القاعة "أ"، مع الافتراض أنّ توزيع الأشخاص بين القاعات الثلاث كان بنفس النسبة الّتي كانت في اليوم الّذي وصل فيه السيّد حسن ؟

18) أُجريتْ في مدينة معيّنة انتخاباتٌ لرئاسة البلديّة.
تنافس ثلاثة أشخاص: المتنافس "أ"، المتنافس "ب" والمتنافس "ج".
فيما يلي توزيع أصوات الناخبين كما تمّ فرزها في عيّنة ممثّلة مؤلّفة من 250 شخصًا:

المتنافس الّذي اختاره النّاخب	المتنافس "أ"	المتنافس "ب"	المتنافس "ج"	الإجمال
التكراريّة (عدد الأشخاص)	120	50	80	250

(أ) إذا التقينا بشخصٍ عشوائيٍّ من هذه المدينة، فما هو الاحتمال بأن يكون يدعم المتنافس "ب" ؟

(ب) كان عدد النّاخبين الكلّيّ في هذه الانتخابات 20,000 .
كم من بينهم (بالتّقريب) دعموا المتنافس "ب" ؟

خصائص الاحتمال

عندما يكون لكلّ نتائج التجربة نفس احتمال الحدوث،
تُسمّى التجربة: تجربة ذات احتمالٍ متجانس.
في هذه الحالة، إذا كان عدد النتائج هو n ،
فإنّ احتمال كلّ واحدةٍ من النتائج هو $\frac{1}{n}$.

أمثلة

(1) معطى مكعّب تزيه مُسجّلة على أوجهه الحروف التالية: أ ، ل ، ج ، ب ، ر ، هـ .
نُلقي المكعّب.

(أ) ما هو الاحتمال بأن نحصل على الحرف **"ج"** ؟
(ب) ما هو الاحتمال بأن نحصل على الحرف **"ب"** ؟
(ج) هل إلقاء مكعّب كهذا هو تجربة ذات احتمال متجانس ؟

<u>الحلّ:</u>

(أ) الاحتمال بأن نحصل على الحرف **"ج"** هو $\frac{1}{6}$ ، لأنّه يوجد 6 أوجهٍ ولكلّ منها يوجد نفس الاحتمال بالحصول عليه.

(ب) الاحتمال بأن نحصل على الحرف **"ب"** هو $\frac{1}{6}$ ، لأنّه يوجد 6 أوجهٍ ولكلّ منها يوجد نفس الاحتمال بالحصول عليه.

(ج) هذه التجربة هي تجربة ذات احتمال متجانس، لأنّ كلّ حرفٍ يظهر مرّة واحدة فقط، ولذا لكلّ حرفٍ يوجد نفس الاحتمال للحصول عليه.

إنتبهوا: حاصل جمع احتمالات كلّ النتائج يساوي 1 .

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=1$$

(2) في علبة 5 بطاقات. سجَّلوا على كلّ بطاقة اسمَ ولدٍ.
تختلف الأسماء عن بعضها البعض. أحد الأسماء هو **"إياس"**.
إذا أخرجنا بشكلٍ عشوائيٍّ بطاقة من العلبة:
(أ) فما هو الاحتمال بأن يكون مكتوبٌ على البطاقة **"إياس"** ؟
(ب) فما هو الاحتمال بأن **لا** يكون مكتوبٌ على البطاقة **"إياس"** ؟

الحلّ:

(أ) التجربة الموصوفة هي تجربة ذات **احتمال متجانس**: لكلّ واحدةٍ من البطاقات الخمس يوجد بالضبط نفس الاحتمال لإخراجها.
الاحتمال بأن نُخرج البطاقة المكتوب عليها **"إياس"** هو $\frac{1}{5}$.

(ب) الاحتمال بأن نُخرج البطاقة الّتي **لم** يُكتبْ عليها **"إياس"** هو $\frac{4}{5}$ ، لأنّه على 4 بطاقاتٍ من بين 5 البطاقات، مكتوبة أسماء أخرى.

إنتبهوا: حاصل جمع الاحتمال بأن نحصل على نتيجة، والاحتمال بأن لا نحصل على نفس النتيجة، هو 1 .

$$\frac{1}{5}+\frac{4}{5}=1$$

(3) في جرّة غير شفّافة توجد كرات متماثلة إلّا من حيث اللون.

إحدى الكرات لونها أحمر. علينا إخراج كرة من الجرّة بشكلٍ عشوائيٍّ.

معلومٌ بأنّ الاحتمال بأن نُخرج الكرة الحمراء يساوي $\frac{1}{3}$.

كم كرة يوجد في الجرّة ؟

__الحلّ:__

التجربة الموصوفة هي تجربة ذات احتمالٍ متجانس لأنّ لكلّ واحدةٍ من الكرات يوجد نفس الاحتمال بأن نُخرجها. إذا كان في الجرّة n كرات، فإنّ احتمال إخراج كلّ كرة يساوي $\frac{1}{n}$. معلومٌ أنّ الاحتمال بأن نختار الكرة الحمراء يساوي $\frac{1}{3}$.

إستنتاج: $n = 3$ ، أي، في الجرّة 3 كرات.

(4) على رفٍّ في المكتبة، يوجد كتب. قسمٌ منها بالعربيّة، قسمٌ بالإنجليزيّة والباقي بالروسيّة. نختار كتابًا بشكلٍ عشوائيٍّ. معطى: الاحتمال بأن نختار كتابًا بالعربيّة يساوي $\frac{1}{2}$ ، الاحتمال بأن نختار كتابًا بالإنجليزيّة يساوي $\frac{1}{3}$.

ما هو الاحتمال بأن نختار كتابًا بالروسيّة ؟

__الحلّ:__

نشير بـ x إلى الاحتمال بأن نختار كتابًا بالروسيّة.

نستطيع أن نكتب: 1 = الاحتمال لكتاب بالروسيّة + الاحتمال لكتاب بالإنجليزيّة + الاحتمال لكتاب بالعربيّة

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + x = 1$$

$$\frac{5}{6} + x = 1 \quad / -\frac{5}{6}$$

$$x = \frac{1}{6}$$

جواب: الاحتمال بأن نختار كتابًا بالروسيّة هو $\frac{1}{6}$.

- **حاصل جمع احتمالات كلّ نتائج تجربة يساوي 1 .**
- **حاصل جمع احتمال حصول نتيجة معيّنة واحتمال عدم حصولها يساوي 1 .**

تمارين

(1) وجهان من أوجه مكعّب لعبٍ نزيهٍ مدهونان بالأحمر.
وجهان آخران لنفس مكعّب اللعب مدهونان بالأسود.
وجهان إضافيّان للمكعّب مدهونان بالأبيض.
إختاروا الإجابة الصحيحة وعلّلوا:
(أ) إلقاء هذا المكعّب هو تجربة ذات احتمال متجانس.
(ب) إلقاء هذا المكعّب هو تجربة ذات احتمال غير متجانس.

(2) هل إلقاء قطعة نقديّة نزيهة هو تجربة ذات احتمال متجانس أم لا ؟ علّلوا.

(3) التلاميذ الّذين سيأتي ذكرُهم انتُخِبوا لمجلس الطلّاب: ورد، دالية، كميل، عصام، نجاح وأنور.
نختار من بينهم بشكلٍ عشوائيٍّ تلميذًا لأنْ يكون رئيس مجلس الطلّاب.
(أ) ما هو الاحتمال بأنْ **نختار** عصام ليكون رئيس مجلس الطلّاب ؟
(ب) ما هو الاحتمال بأنْ **لا نختار** عصام ليكون رئيس مجلس الطلّاب ؟
(ج) ما هو حاصل جمع الاحتمالين في البندين (أ) و- (ب) ؟ إشرحوا.

(4) يوجد في جرّة 4 كراتٍ مختلفة الألوان: حمراء، خضراء، صفراء وزرقاء.

(أ) ما هو الاحتمال بأن نُخرج كرة خضراء ؟

(ب) ما هو حاصل جمع احتمالات كلّ النتائج الممكنة للون الكرة التي نُخرجها من هذه الجرّة ؟ إشرحوا.

(5) (أ) أُكتبوا مثالًا لتجربة ذات احتمالٍ متجانس.

(ب) أُكتبوا مثالًا لتجربة ذات احتمالٍ غير متجانس.

(6) تظهر فيما يلي الكلمات الآتية:

فرفش، جلجل، تلتل، مشمش، صرصر.

(أ) ما هو الاحتمال بأن نختار كلمة يظهر كلّ حرفٍ فيها مرّتين ؟

(ب) ما هو الاحتمال بأن نختار كلمة مركّبة من 4 أحرفٍ مختلفة ؟

(ج) ما هو حاصل جمع احتمالَي البندين (أ) و- (ب) ؟ إشرحوا.

(7) توزيع الأزهار في حديقة بحسب لونها، معطى في الجدول التالي:

اللون	أحمر	أصفر	برتقاليّ	أبيض
عدد الأزهار	20	30	15	25

طُلِب من زيدان بأن يقطف بشكلٍ عشوائيٍّ زهرة من هذه الحديقة.

(أ) ما هو الاحتمال بأن يقطف زيدان زهرة صفراء ؟

(ب) بيّنوا أنّه يتحقّق: $1 =$ الاحتمال لحمراء $+$ الاحتمال لصفراء $+$ الاحتمال لبرتقاليّة $+$ الاحتمال لبيضاء

(8) توزيع التلاميذ في الصفّ الثامن "هـ" بحسب لون العينين معطى في الجدول التالي:

لون العينين	سوداوان	بنيّتان	زرقاوان	خضراوان
عدد التلاميذ	6	15	8	7

نختار بشكلٍ عشوائيٍّ تلميذًا من الصفّ الثامن "هـ" .

(أ) ما هو الاحتمال بأن يكون لون عينيْ هذا التلميذ سوداوين ؟

(ب) بيّنوا أنّه يتحقّق: الاحتمال لبنيّتين $=$ الاحتمال لزرقاوين $+$ الاحتمال لخضراوين